UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

FACULTE DES SCIENCES

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire pour l'obtention du

Diplôme d' Etudes Approfondies de Mathématiques Appliquées

Spécialité : Combinatoire

Calcul Fixe-Mahonien

soutenu le 4 Nov 2008 par :

RANDRIAMARO Hery

Devant la commission de l'examen

Président	:	M. HARISON Victor, Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo
Rapporteur	:	M. RANDRIANARIVONY Arthur, Professeur à l'Université d'Antananarivo
Examinateurs	:	M. RALAMBO Alain, Maître de Conférence à l'Université d'Antananarivo
	:	M. RAZAFIMANANTSOA Gérard, Maître de Conférence à l'Université d'Antananarivo

A ma mère . . .

Remerciements

Que soient remerciés :

– **Ma Mère**, sans qui je ne serais pas parvenu jusqu'à une soutenance
– **Ma Famille**
– **Mes Amis**
– **M. RANDRIANARIVONY Arthur**, pour sa patience, son dévouement, grâce à qui j'ai pu comprendre la distinction décisive entre comprendre et améliorer.
– **M. HARISON Victor**, qui m'a fait l'honneur de présider ma soutenance et qui a été indulgent envers moi malgré mes quelques retards à son cours.
– **M. RALAMBO Alain**, pour ses encouragements durant mes études universitaires, pour tout ce qu'il m'a appris, autant mathématiquement que moralement, et la liste n'est pas exhaustive.
– **M. RAZAFIMANANTSOA Gérard**, pour avoir accepter de faire partie des membres du Jury et pour toutes les bourses extérieures qu'il m'a proposé
– Tous ceux qui, de loin ou de près, ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Ce travail a été tiré de l'article de Foata et Han [5] intitulé *Fix-Mahonian Calculus, II : further statistics*. Ces deux auteurs ont construit récemment des statistiques multivariables sur le groupe symétrique S_n. Par des bijections classiques telles que la seconde transformation fondamentale de Foata, et des nouvelles transformations qu'ils ont construites, entre autre les transformations $\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{F_3}$. Ils ont réussi à montrer que certains triplets (ou paires) de statistiques multivariables sont équidistribués à des statistiques classiques introduisant le nombre de points fixes : L'une d'entre elles est le triplet (fix, des, maj) où $fix\,\sigma$, $des\,\sigma$ et $maj\,\sigma$ sont respectivement le nombre de points fixes, le nombre de descentes et l'indice majeur de σ. Cette dernière est une statistique mahonienne bien connue. Ce qui justifie le titre de ce mémoire.
Rappelons que fix, des et maj sont définies par : $(\sigma \in S_n)$

$$fix\,\sigma = \sum_{i=1}^{n} \chi(\sigma(i) = i)$$

$$des\,\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$$

$$maj\,\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} i\chi(\sigma(i) > \sigma(i+1))$$

où $\chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ un énoncé vrai} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
L'ensemble des $1 \leq i \leq n$ tels que $\sigma(i) = i$ est l'ensemble des points fixes de σ noté $FIX\,\sigma$.
L'ensemble des $1 \leq i \leq n-1$ tels que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ est l'ensemble des descentes de σ noté $DES\,\sigma$.
On a alors $maj\,\sigma = \sum_{i \in DES\,\sigma} i$.
Tout $\sigma \in S_n$ tel que $FIX\,\sigma = \emptyset$ est appelé un dérangement de $[n] := \{1, \ldots, n\}$. On note D_n l'ensemble des dérangements de $[n]$.
Une autre statistique bien connue est le nombre d'inversion inv. Elle est définie par :

$$inv\,\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>1} \chi(\sigma(i) > \sigma(j)) \qquad (\sigma \in S_n)$$

On peut généraliser ces statistiques sur l'ensemble des mots.
Pour des raisons de simplification, nous adoptons les notations suivantes : Soit A un ensemble non vide. On note

- M_A l'ensemble des mots $w = x_1 \ldots x_n$ tels que $x_i \in A$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
  On convient que le mot vide e appartient à M_A.

– S_A l'ensemble des mots $w = x_1 \dots x_n \in M_A$ de longueur n, où $n = \#A$, tels que $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.
  $S_{[n]}$ n'est autre que le groupe symétrique S_n.

Soit $w \in M_{\mathbb{N}}$. On définit exactement $fix\, w$, $des\, w$, $maj\, w$ et $inv\, w$ comme dans le cas de $\sigma \in S_n$.

0.1 Réduite d'un mot sans répétition

Définition 0.1.1 *Soient A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que $|A| = n$ $(n \geq 1)$ et $w = x_1 \dots x_n \in S_A$. Soit $x_{\theta(1)} \dots x_{\theta(n)}$ le réarrangement du mot w par ordre croissant.*
On a appelle réduite de w et on note $red\, w$ le mot de longueur n déduit du mot w en remplaçant chaque $x_{\theta(i)}$ par i $(1 \leq i \leq n)$.

$\underline{Ex}$: $red(4\ 8\ 3\ 5\ 1) = 3\ 5\ 2\ 4\ 1$.

Proposition 0.1.2 *Soit $A \subset \mathbb{N}^*$, $|A| = n$. Alors red est une bijection de S_A sur S_n.*

Définition 0.1.3 (Dérangement d'une permutation) *Soit σ une permutation de $[n]$ ayant $n - m$ points non fixes $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}}$ $(j_1 < \cdots < j_{n-m})$.*
On appelle dérangement de σ et on note $Der\, \sigma$ la réduite $red\, x_{j_1} \dots x_{j_{n-m}}$.

Proposition 0.1.4 *Soit $F = \{i_1, \dots, i_m\} \subset [n]$ et $S_{n,F} = \{\sigma \in S_n \ /\ FIX\, \sigma = F\}$.*
Alors Der est une bijection de $S_{n,F}$ sur D_{n-m}.

Définition 0.1.5 (Décomposition fixée) *Soit $\sigma \in S_{n,F}$.*
Le couple $(F, Der\, \sigma)$ est appelé la décomposition fixée de σ.
$(F, Der\, \sigma)$ détermine entièrement σ.

Définition 0.1.6 (Désarrangement) *Soit w un mot non vide de $\mathbb{N}$.*
On dit que w est un désarrangement si w peut s'écrire sous la forme $w'w''$ où w' est un mot décroissant maximal de longueur paire.
En particulier, si $w = x_1 \dots x_n$ avec $x_i = n + 1 - i$, alors w est un désarrangement si et seulement si n est pair. On convient que $x_{n+1} = \infty$.
On note K_n l'ensemble des désarrangements de S_n.

Définition 0.1.7 (Décomposition pixée) *Soit $\sigma \in S_n$.*
Alors σ peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $\sigma^p \sigma^d$ où σ^p est un mot croissant et $red\, \sigma^d$ est un désarrangement de S_{n-m} $(m = |\sigma^p|)$.
Les éléments de σ^p sont appelés points pixés de σ. On note $PIX\, \sigma$ l'ensemble des points pixés de σ, $pix\, \sigma = \#PIX\, \sigma$ et $Desar\, \sigma = red\, \sigma^d$.
$(PIX\, \sigma, Desar\, \sigma)$ est appelé la décomposition pixée de σ.
$(PIX\, \sigma, Desar\, \sigma)$ détermine entièrement σ.

$\underline{Ex}$: Soit $\sigma = 4\ 6\ 7\ 8\ 5\ 3\ 1\ 9\ 2 \in S_9$.
$\sigma^p = 4\ 6\ 7$ et $\sigma^d = 8\ 5\ 3\ 1\ 9\ 2$;
$PIX\, \sigma = \{4, 6, 7\}$ et $pix\, \sigma = 3$;
$Desar\, \sigma = red\, 8\ 5\ 3\ 1\ 9\ 2 = 5\ 4\ 3\ 1\ 6\ 2$;

0.2 Autres statistiques

Définition 0.2.1 ($IDES, imaj$) *Soit $w \in S_A$. Alors $red\,w \in S_n$ où $n = |A|$.*
Toute descente de $(red\,w)^{-1}$ est appelé descente inverse de w. L'ensemble des descentes inverses de w est noté $IDES\,w$.
On définit de même l'indice majeur inverse de w par :

$$imaj\,w = \sum_{i \in IDES\,w} i.$$

Définition 0.2.2 *Soient $\sigma = x_1 \dots x_n \in S_n$ et $\{i_1, \dots, i_m\} = [n] \backslash FIX\,\sigma$, $i_1 \leq \dots \leq i_m$.*
On définit le mot $ZDer\,\sigma$ par : Si $ZDer\,\sigma = x'_1 \dots x'_n$, alors

$$\begin{cases} Der\,\sigma = red\,x_{i_1} \dots x_{i_m} = x'_{i_1} \dots x'_{i_m} \\ \quad x'_i = 0 \ \ \text{si } i \notin \{i_1, \dots, i_m\} \end{cases}$$

Définitions 0.2.3 (DEZ, maz) *Soient $\sigma \in S_n$ et $DEZ\,\sigma := DES\ ZDer\,\sigma$.*
On définit la statistique maz par :

$$maz\,\sigma = \sum_{i \in DEZ\,\sigma} i.$$

<u>*Ex*</u> : Soit $\sigma = 5\ 6\ 7\ \mathbf{4}\ 3\ 1\ 8\ 2\ \mathbf{9} \in S_9$.
$IDES\,\sigma = \{2, 3, 4\}$ et $imaj\,\sigma = 2 + 3 + 4 = 9$;
$ZDer\,\sigma = 4\ 5\ 6\ 0\ 3\ 1\ 7\ 2\ 0$;
$DEZ\,\sigma = \{3, 5, 7, 8\}$ et $maz\,\sigma = 3 + 5 + 7 + 8 = 23$.

Définition 0.2.4 (maf) *Soit $\sigma \in S_n$. On définit la statistique maf par :*

$$maf\ \sigma := \sum_{i \in FIX\ \sigma} i - \sum_{i=1}^{fix\ \sigma} i + maj \circ Der\ \sigma$$

Définition 0.2.5 (mag) *Soit $\sigma \in S_n$. On définit la statistique mag par :*

$$mag\ \sigma := \sum_{i \in PIX\ \sigma} i - \sum_{i=1}^{pix\ \sigma} i + imaj \circ Desar\ \sigma$$

0.3 Equidistributivité

Rappelons que deux statistiques s et t sur S_n sont dites équidistribuées si il existe une bijection $f : S_n \rightarrow S_n$ telle que

$$\forall \sigma \in S_n,\ s(\sigma) = t(f(\sigma)).$$

Plus généralement, deux n-uplets de statistiques sur S_n $(s_1, \dots, s_n)$ et $(t_1, \dots, t_n)$ sont dits équidistribués si il existe une bijection $f : S_n \rightarrow S_n$ telle que

$$\forall \sigma \in S_n,\ (s_1(\sigma), \dots, s_n(\sigma)) = (t_1(f(\sigma)), \dots, t_n(f(\sigma))).$$

L'objectif de ce mémoire est de prouver les théorèmes suivant :

Théorème 0.3.1 *Les paires de statistiques suivantes sont équidistribuées sur S_n :*
(1) (FIX, maf) *et* (PIX, mag) *;*
(2) (FIX, DEZ) *et* $(PIX, IDES)$ *;*
(3) (fix, maz) *et* $(pix, imaj)$*.*

Théorème 0.3.2 *Les paires de statistiques suivantes sont équidistribuées sur S_n :*
(1) (pix, inv) *et* $(pix, imaj)$ *;*
(2) (PIX, mag) *et* (PIX, inv)*.*

Théorème 0.3.3 *Les triplets et paires de statistiques suivants sont équidistribués sur S_n :*
(1) (fix, DEZ, Der) *et* (fix, DES, Der) *;*
(2) (fix, maz) *et* (fix, maj)*.*

Théorème 0.3.4 *Les triplets de statistiques suivants sont équidistribués sur S_n :*
(1) (fix, maj, Der), (fix, maf, Der), (fix, maz, Der) *;*
(2) $(pix, mag, Desar)$ *et* $(pix, imaj, Desar)$*.*
De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{DW^{loc}} & S_n \\ {\scriptstyle \bar{F}_3}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \bar{F}'_3} \\ S_n & \xrightarrow{DW^{loc}} & S_n \end{array}$$

On rencontrera la bijection DW^{loc} dans le chapitre 1 et les bijections $\bar{F}_3$ et $\bar{F}'_3$ dans le chapitre 4.

Chapitre 1

Bijection de Désarménien-Wachs

La bijection DW de Désarménien et Wachs [2] a la particularité d'être une bijection implicite, dans le sens où elle ne possède pas de formulation mathématique explicite mais son existence est prouvé. La preuve de son existence passe par l'utilisation des mots de Lyndon. On débute d'ailleurs ce chapitre par ces mots particuliers.
Foata et Han ont ensuite prolongé la bijection DW pour obtenir la bijection DW^{loc} [5]. C'est à partir de DW^{loc} que l'on établie l'équidistributivité des doublets de statistiques (fix, maz) et $(pix, imaj)$, (FIX, maf) et (PIX, mag), puis (FIX, DEZ) et $(PIX, IDES)$.

1.1 Mots de Lyndon

Définition 1.1.1 *Un mot $w \in M_{\mathbb{N}}$ est dit primitif s'il n'existe aucun mot $v \in M_{\mathbb{N}}$ non vide tel que $w = v^p$, $p > 1$.*

Définition 1.1.2 *Soient $s = s_1 \dots s_p$, $t = t_1 \dots t_q \in M_{\mathbb{N}}$. On dit que s est lexicographiquement plus petit que t, et on écrit $s <_{lex} t$, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. $s_1 < t_1$
2. *il existe k tel que $2 \leq k \leq min(|s|, |t|)$, $s_i = t_i$ pour $1 \leq i < k$ et $s_k < t_k$*
3. $|s| < |t|$ *et $s_i = t_i$ pour $1 \leq i \leq |s|$.*

De façon analogue, on définit sur $M_{\mathbb{N}}$ les relations d'ordre $>_{lex}$, $\leq_{lex}$ et $\geq_{lex}$.

Proposition 1.1.3 *Pour tout couple (u, v) de mots distincts de $M_{\mathbb{N}}$,
on a $u <_{lex} v$ ou $v <_{lex} u$.*

Preuve. Supposons que $|u| \leq |v|$.
Si v peut s'écrire $v = uv'$, alors on a clairement $u <_{lex} v$.
Sinon, soit k le plus petit entier i tel que $u_i \neq v_i$. On a $u <_{lex} v$ si $u_k < v_k$,
et $v <_{lex} u$ sinon.
□

Définition 1.1.4 *Un mot de Lyndon $w = w_1 w_2 \dots w_n$ est un mot primitif tel que pour tout $1 < k \leq n$:*

$$w < w_k \dots w_n w_1 \dots w_{k-1}.$$

<u>Ex</u> : Le mot primitif 113122, lexicographiquement strictement inférieur aux mots 131221, 312211, 122113, 221131 et 211312, est un mot de Lyndon.

Proposition 1.1.5 *Soit $w \in M_{\mathbb{N}}$. S'il existe $u, v, t \in M_{\mathbb{N}}$ tous non vides tels que $w = tv = ut$, alors w n'est pas un mot de Lyndon.*

Preuve. Supposons qu'il existe un mot t tel que $w = tv = ut$ où u, v et t sont non vides. Supposons que w soit un un mot de Lyndon. $w = tv <_{lex} tu$, d'où $v <_{lex} u$. De même, $w = ut <_{lex} vt$ et donc $u <_{lex} v$. Avec $v <_{lex} u$ et $u <_{lex} v$, nous aboutissons à une contradiction.
□

Proposition 1.1.6 *Soit $w = w_1 \dots w_n \in M_{\mathbb{N}}$ un mot de longueur n.*
Alors w est un mot de Lyndon si et seulement si pour tout facteur droite propre h de w, $w <_{lex} h$.
Notons que h est un facteur droite (resp. facteur droite propre) de w si w peut s'écrire $w = w'h$ (resp. avec $h \neq w$).

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit h un facteur droite propre de w de longueur r $(r < n)$: $w = w'h$.
On a $w <_{lex} hw'$. Si $w_1 \dots w_r = h$, w pourrait s'écrire $w = hv$ et w ne serait pas un mot de Lyndon. Par conséquent, $w_1 \dots w_r <_{lex} h$.
($\Leftarrow$) Soit $w = w_1 \dots w_n$ et prenons $h = w_k \dots w_n$ $(2 \leq k \leq n)$.
On a $w <_{lex} h$ et par suite $w <_{lex} w_k \dots w_n w_1 \dots w_{k-1}$.
Ce qui prouve que w est un mot de Lyndon.
□

Proposition 1.1.7 *Si f et g sont deux mots de Lyndon et si $f <_{lex} g$ alors fg est un mot de Lyndon.*

Preuve. Soient f et g deux mots de Lyndon avec $f <_{lex} g$. Posons $w = fg$. Soit h un facteur droite de w : $w = th$ avec t non vide.
Si $h = g$:
- si f n'est pas un facteur gauche de g, on a $fg <_{lex} g$, soit $w <_{lex} h$;
- si f est un facteur gauche de g, $g = fu$ avec u non vide. Comme g est un mot de Lyndon, on a $g <_{lex} u$ et donc $fg <_{lex} fu$, soit $w <_{lex} h$.

Si $h \neq g$:
- si h est un facteur droite de g, on a $fg <_{lex} g$, $g <_{lex} h$ et donc $w <_{lex} h$;
- si g est un facteur droite de h, $h = vg$ où v est un facteur droite de f, donc $f <_{lex} v$ et $fg <_{lex} vg$, soit $w <_{lex} h$.

Dans tous les cas nous avons $w <_{lex} h$, w est donc un mot de Lyndon.
□

Définition 1.1.8 (factorisation décroissante) *Une factorisation décroissante d'un mot $w \in M_{\mathbb{N}}$ est une suite de mots $(w_1, w_2, \dots, w_r)$ tels que :*

1. *$w = w_1 w_2 \dots w_r$*
2. *chaque w_i est de la forme $a_i^{j_i} u_i$, où $a_i \in \mathbb{N}$, $j_i > 0$ et u_i est un mot non vide formé par des lettres de $\{x \in \mathbb{N} | x > a_i\}$*

3. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$.

Ex : La factorisation décroissante de $23|2255|114423|14$ est $(23, 2255, 114423, 14)$.

Remarque. Il existe des mots comme 111 qui n'admettent pas de factorisation décroissante, puisqu'il n'existe aucun mot non vide u, formé par des lettres de $\{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$, tel que 111 soit de la forme $1^3 u$.

Proposition 1.1.9 *Si un mot $w \in M_{\mathbb{N}}$ admet une factorisation décroissante, alors cette factorisation décroissante est unique.*

Preuve. Supposons que w admette deux factorisations décroissantes $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$ et $(w'_1, w'_2, \ldots, w'_{r'})$ telles que w_i soit de la forme $a_i^{j_i} u_i$ et w'_i de la forme $a'^{j'_i}_i u'_i$. Supposons que w_r soit un facteur droite de $w'_{r'}$: $w'_{r'} = b w_r$ où b est un mot de $\mathbb{N}$. Comme a_r est par définition la plus petite lettre de w, nous avons forcément $a'_{r'} \geq a_r$. Et comme la dernière lettre de w_{r-1} est plus grande que a_r, la seule possibilité est que $a'_{r'} = a_r$. Enfin, si b n'est pas le mot vide, il contiendrait la dernière lettre de w_{r-1} et $w'_{r'}$ ne serait plus de la forme $a'^{j'_{r'}}_{r'} u'_{r'}$. b est donc le mot vide et $w_r = w'_{r'}$. Par un raisonnement analogue, nous avons $w_{r-1} = w'_{r'-1}$. D'où, en poursuivant ce raisonnement jusqu'à avoir $w_1 = w'_{r'-r+1}$, nous aboutissons à $(w_1, w_2, \ldots, w_r) = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_{r'})$.
□

Définition 1.1.10 *Une factorisation de Lyndon d'un mot $w \in M_{\mathbb{N}}$ est une suite de mots $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$ telle que :*

1. *w_i soit un mot de Lyndon pour $i \in [r]$,*
2. *$w = w_1 w_2 \ldots w_r$,*
3. *$w_1 \geq_{lex} w_2 \geq_{lex} \cdots \geq_{lex} w_r$.*

Ex : La factorisation de Lyndon de $23|2255|11442314$ est $(23, 2255, 11442314)$.

Théorème 1.1.11 (Lyndon) *Tout mot dans $M_{\mathbb{N}}$ admet une unique factorisation de Lyndon.*

Preuve. (Existence) Soit $w = x_1 x_2 \ldots x_n \in M_{\mathbb{N}}$ à factoriser. A partir de la liste $L_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de mots de Lyndon, on réitère comme suit :

- On parcourt L_0 de droite à gauche. A chaque $i \in [n-1]$, si $x_i \geq_{lex} x_{i+1}$, on continue le parcours. Sinon, dans le cas où $x_i <_{lex} x_{i+1}$, on remplace dans L_0 les deux mots x_i et x_{i+1} par le mot $x_i x_{i+1}$, autrement dit on obtient la nouvelle liste de mots $L_1 = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$.
- Sur la nouvelle liste de mots $L_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1)$ on réitère la même procédure.
- On réitère la procédure jusqu'à l'aboutissement d'une liste finale $L_f = (x_1^f, x_2^f, \ldots, x_{n_f}^f)$ telle qu'il n'existe plus de j tel que $x_j^f <_{lex} x_{j+1}^f$.

Cette liste finale L_f est une factorisation de Lyndon de w.
(Unicité) Soient $(w_1, \ldots, w_r)$ et $(w'_1, \ldots, w'_{r'})$ deux factorisations de Lyndon de w. Supposons que w_1 soit facteur gauche de w'_1 et que $w_1 \neq w'_1$: $w'_1 = w_1 u$ où $u = u_1 \ldots u_{|u|}$ n'est pas le mot vide. Il existe $k \in [|u|]$ et $i \in [r] \backslash \{1\}$ tels que $u_k \ldots u_{|u|}$ soit un facteur gauche de w_i. Dans ce cas, puisque $w_1 \geq_{lex} w_2 \geq_{lex} \cdots \geq_{lex} w_r$, $w_1 u \geq_{lex} u_k \ldots u_{|u|}$ et w'_1 ne serait

donc plus un mot de Lyndon, ce qui est contradictoire. u est donc le mot vide. En réitérant ce raisonnement pour w_2 jusqu'à pour w_r, nous obtenons l'unicité de la factorisation de Lyndon.
□

Proposition 1.1.12 *Un mot admet une factorisation décroissante si et seulement si sa factorisation de Lyndon n'admet aucun mot de longueur* 1.

Preuve. ($\Leftarrow$) D'abord, on observe que tout mot de Lyndon de longueur strictement supérieure à 1 admet une factorisation décroissante. En effet, si w est un mot de Lyndon ayant a comme plus petite lettre, alors w est de la forme

$$a^{j_1}u_1a^{j_2}u_2\dots a^{j_r}u_r,$$

où $j_i > 0$ et u_i un mot formé par des lettres de $\{x \in \mathbb{N}|x > a\}$. A présent, si w est un mot ayant $w_1w_2\dots w_k$ comme factorisation de Lyndon où la longueur de chaque w_i est strictement supérieure à 1, alors les factorisations décroissantes des w_i s'associent pour former la factorisation décroissante de w.
($\Rightarrow$) Soit w un mot admettant la factorisation décroissante $(w_1, w_2, \dots, w_r)$. Chaque mot w_i est de la forme $a_i^{j_i}u_i$, où $a_i \in \mathbb{N}$, $j_i > 0$ et u_i un mot non vide formé par des lettres de $\{x \in \mathbb{N}|x > a_i\}$. Puisque $a_i^{j_i}u_i$ est un mot primitif et qu'il est lexicographiquement inférieur à toutes ses rotations cycliques, $a_i^{j_i}u_i$ est alors un mot de Lyndon de longueur strictement supérieure à 1. A partir de la liste $L_0 = (w_1, w_2, \dots, w_r)$ de mots de Lyndon, on réitère comme suit :

- On parcourt L_0 de droite à gauche. A chaque $i \in [n-1]$, si $w_i \geq_{lex} w_{i+1}$, on continue le parcours. Sinon, dans le cas où $w_i <_{lex} w_{i+1}$, on remplace dans L_0 les deux mots w_i et w_{i+1} par le mot w_iw_{i+1}, autrement dit on obtient la nouvelle liste de mot $L_1 = (w_1, \dots, w_{i-1}, w_iw_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$.
- Sur la nouvelle liste de mot $L_1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_{n_1}^1)$ on réitère la même procédure.
- On réitère la procédure jusqu'à l'aboutissement d'une liste finale $L_f = (w_1^f, w_2^f, \dots, w_{n_f}^f)$ telle qu'il n'existe plus de j tel que $w_j^f <_{lex} w_{j+1}^f$.

On aboutit à la factorisation de Lyndon de w, factorisation qui n'admet aucun mot de longueur 1.
□

1.2 Bijection DW de Désarménien-Wachs

1.2.1 Transformation μ

Définitions 1.2.1 *Un multi-ensemble M est un ensemble de lettres qui peut posséder plusieurs fois la même lettre.*
On note un multi-ensemble M par $M = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, m^{k_m}\}$ où k_i est le nombre d'occurrences de la lettre i qui peut être nul.
S_M l'ensemble des mots dont la lettre i apparaît exactement k_i fois, $i = 1, 2, \dots, m$.

<u>Ex</u> : $3\ 1\ 1\ 3\ 2\ 3 \in S_M$, où $M = \{1^2, 2, 3^3\}$.

Soient $M = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, m^{k_m}\}$ un multi-ensemble tel que $k_1 + \cdots + k_m = n$ et $\sigma = x_1 \ldots x_n \in S_n$. Soit $x_{\theta(1)} x_{\theta(2)} \ldots x_{\theta(n)}$ le réarrangement croissant de σ i.e. $x_{\theta(1)} < x_{\theta(2)} < \cdots < x_{\theta(n)}$. On note $\mu(\sigma)$ le mot déduit de σ en remplaçant

$$x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(k_1)} \textit{ par } 1$$

$$x_{\theta(k_1+1)}, \ldots, x_{\theta(k_2)} \textit{ par } 2$$

$$\vdots$$

$$x_{\theta(k_{m-1}+1)}, \ldots, x_{\theta(k_m)} \textit{ par } m$$

On a bien $\mu(\sigma) \in S_M$.

<u>*Ex*</u> : Soient $M = \{1^2, 2, 3^3, 4\}$ et $\sigma = 4\ 2\ 1\ 7\ 5\ 3\ 6$: $\mu(\sigma) = 3\ 1\ 1\ 4\ 3\ 2\ 3$.

Définition 1.2.2 *Soit $J \subset [n-1]$. On définit ${}^J S_n = \{\sigma \in S_n | IDES\, \sigma \subseteq J\}$ et ${}^J K_n = \{\sigma \in K_n | IDES\, \sigma \subseteq J\}$.*

Lemme 1.2.3 *Soient $J = \{k_1, k_1 + k_2, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} k_i\}$, $\sigma = x_1 \ldots x_n \in {}^J S_n$ et, pour $1 \leq j \leq m$, $\alpha_j(1) < \cdots < \alpha_j(k_j)$ les k_j entiers tels que $\sum_{a=1}^{j-1} k_a < x_{\alpha_j(i)} \leq \sum_{a=1}^{j} k_a$ pour $1 \leq i \leq k_j$. Alors*

$$x_{\alpha_j(1)} < x_{\alpha_j(2)} < \cdots < x_{\alpha_j(k_j)}.$$

En d'autres termes, $x_{\alpha_j(i)} = \sum_{a=1}^{j-1} k_a + i$ pour tout $1 \leq i \leq k_j$.

Preuve. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, k_j\}$ tel que $x_{\alpha_j(i)} \neq \sum_{a=1}^{j-1} k_a + i$. Soit r_j le plus grand entier tel que $x_{\alpha_j(r_j)} \neq \sum_{a=1}^{j-1} k_a + r_j$.
Posons $x_{\alpha_j(r_j)} = s$.
Comme $x_{\alpha_j(i)} = \sum_{a=1}^{j-1} k_a + i$ pour tout $i > r_j$ et $s < \sum_{a=1}^{j-1} k_a + r_j$, alors il existe $t < r_j$ tel que $x_{\alpha_j(t)} = s + 1$.
On en conclut que $s \in IDES\, \sigma$. Or $s \notin J$.
□

Proposition 1.2.4 *Soient $M = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, m^{k_m}\}$, $k_1 + \cdots + k_m = n$, et $J = \{k_1, k_1 + k_2, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} k_i\}$:*

$$\mu : {}^J S_n \to S_M \textit{ est bijective.}$$

Corollaire 1.2.5 *On note K_M l'ensemble des désarrangements de S_M.*
La transformation $\mu_{|{}^J K_n} : {}^J K_n \to K_M$ est bijective.

1.2.2 Transformation Γ

Définitions 1.2.6 *Sur l'ensemble M_p des mots primitifs, on définit la relation $\equiv$ par :* $\forall w = w_1 \dots w_n \in M_p,\ \forall w' = w'_1 \dots w'_n \in M_p,$

$$w \equiv w' \Leftrightarrow \begin{cases} w = w' \\ ou \\ \exists j \geq 2, w' = w_j \dots w_n w_1 \dots w_{j-1} \end{cases}$$

$\equiv$ est une relation d'équivalence sur M_p.
La classe d'équivalence d'un mot primitif w sera notée (w).
Un collier est par définition une classe d'équivalence suivant cette relation.
Un ornement est un produit (commutatif) de colliers i.e. une expression de la forme $(w^{(1)})(w^{(2)})\dots(w^{(p)})$.
Comme tout collier contient un mot de Lyndon, alors si $\tau = (w^{(1)})\dots(w^{(p)})$ est un ornement, on peut toujours supposer que $(w^{(i)})$ est un mot Lyndon et $w^{(1)} \geq_{lex} w^{(2)} \geq_{lex} \dots \geq_{lex} w^{(p)}$.
On note T_M l'ensemble des ornements $(w^{(1)})(w^{(2)})\dots(w^{(p)})$ tels que $w^{(1)}w^{(2)}\dots w^{(p)} \in S_M$, M étant un multi-ensemble.

Soit $\tau = (w^{(1)})(w^{(2)})\dots(w^{(p)})$ un ornement.
Posons $w^{(1)}w^{(2)}\dots w^{(p)} = \tau_1\tau_2\dots\tau_n$ et $p = ppcm(|w^{(1)}|, |w^{(2)}|, \dots, |w^{(p)})|$.
Pour tout $1 \leq i \leq n$, si τ_i est la $j^{\text{ème}}$ lettre de $w^{(k)}$, on note $\bar{\tau}_i$ le représentant du collier $(w^{(k)})$ commençant par cette $j^{\text{ème}}$ lettre et $\bar{\tau}'_i = \bar{\tau}_i^{\frac{p}{|\bar{\tau}_i|}}$.
Soit $\bar{\tau}'_{j_1}\bar{\tau}'_{j_2}\dots\bar{\tau}'_{j_n}$ le réarrangement du mot $\bar{\tau}'_1\bar{\tau}'_2\dots\bar{\tau}'_n$ par ordre croissant i.e. $\bar{\tau}'_{j_1} \leq \bar{\tau}'_{j_2} \leq \dots \leq \bar{\tau}'_{j_n}$ tel que si $\bar{\tau}'_{j_l} = \bar{\tau}'_{j_{l+1}}$ alors $j_l < j_{l+1}$.
On considère alors la transformation $\Gamma : \tau \mapsto \sigma$ telle que σ soit la permutation dont la décomposition en cycle se déduit de τ en remplaçant chaque τ_{j_k} par k, $1 \leq k \leq n$.

<u>*Ex*</u> : Soit l'ornement $\tau = (3)(1\ 4\ 2)(1\ 3)(1)$ et $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6\tau_7 = 3\ 1\ 4\ 2\ 1\ 3\ 1$.
On a : $\bar{\tau}'_1 = 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3$, $\bar{\tau}'_2 = 1\ 4\ 2\ 1\ 4\ 2$, $\bar{\tau}'_3 = 4\ 2\ 1\ 4\ 2\ 1$, $\bar{\tau}'_4 = 2\ 1\ 4\ 2\ 1\ 4$,
$\bar{\tau}'_5 = 1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 3$, $\bar{\tau}'_6 = 3\ 1\ 3\ 1\ 3\ 1$, $\bar{\tau}'_7 = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$.
Par suite $\bar{\tau}'_7 < \bar{\tau}'_5 < \bar{\tau}'_2 < \bar{\tau}'_4 < \bar{\tau}'_6 < \bar{\tau}'_1 < \bar{\tau}'_3$.
D'où $\Gamma(\tau) = (6)(3\ 7\ 4)(2\ 5)(1) = 1\ 5\ 7\ 3\ 2\ 6\ 4$.

Définition 1.2.7 *Soit $J \subset [n-1]$.*
On définit $S_n^J = \{\sigma \in S_n | DES\,\sigma \subseteq J\}$ et $D_n^J = \{\sigma \in D_n | DES\,\sigma \subseteq J\}$.

Lemme 1.2.8 *Soit $\tau \in T_M$ et $\sigma = \Gamma(\tau)$. Si $i \in DES\,\sigma$, alors $\tau_{j_i} < \tau_{j_{i+1}}$.*

Preuve. Par construction, la position de τ_{j_i} dans τ n'est autre que celle de i dans la décomposition en cycles de σ (ordonnés comme dans l'ornement). Donc la position de $\sigma(i)$ n'est autre que celle de la deuxième lettre de $\bar{\tau}'_{j_i}$ dans τ.
Supposons que $\tau_{j_i} = \tau_{j_{i+1}}$. Posons $n_k = |\bar{\tau}_{j_k}|$. Soit l_k tel que $1 \leq l_k \leq n_k$ et $l_k \equiv j_k + 1\ (mod\, n_k)$. Deux cas peuvent se présenter : $\bar{\tau}'_{j_i} = \bar{\tau}'_{j_{i+1}}$ et $\bar{\tau}'_{j_i} < \bar{\tau}'_{j_{i+1}}$.
- Si $\bar{\tau}'_{j_i} = \bar{\tau}'_{j_{i+1}}$, alors $j_i < j_{i+1}$ et $\tau_{l_i} = \tau_{l_{i+1}}$. On a nécessairement $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Si $\bar{\tau}'_{j_i} < \bar{\tau}'_{j_{i+1}}$, alors $\bar{\tau}'_{l_i} < \bar{\tau}'_{l_{i+1}}$ car $\tau_{j_i} = \tau_{j_{i+1}}$. Ainsi $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

□

Lemme 1.2.9 *Soit $\tau \in T_M$ et $\sigma = \Gamma(\tau)$. Alors $DES\,\sigma \subset J$.*

Preuve. Comme $\tau_{j_1}\tau_{j_2}\dots\tau_{j_n} = 1^{k_1}2^{k_2}\dots m^{k_m}$, alors $\tau_{j_i} = \tau_{j_{i+1}} \Leftrightarrow i \notin J$. Donc si $i \notin J$, alors $i \notin DES\,\sigma$.
□

Proposition 1.2.10 *Soient $M = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, m^{k_m}\}$, $k_1 + \dots + k_m = n$, et $J = \{k_1, k_1 + k_2, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} k_i\}$:*

$$\Gamma : T_M \to S_n^J \text{ est bijective.}$$

Corollaire 1.2.11 *On note $T_M^{(\geq 2)} = \{(w^{(1)})\dots(w^{(p)}) \in T_M \ / \ |w^{(i)}| \geq 2\}$.*
La transformation $\Gamma_{|T_M^{(\geq 2)}} : T_M^{(\geq 2)} \to D_n^J$ est bijective.

1.2.3 Transformation η

Soient $w \in S_M$ et $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ la décomposition de Lyndon de w. On définit la transformation $\eta : S_M \to T_M$ par :

$$w \mapsto (w_1)(w_2)\dots(w_p).$$

Proposition 1.2.12 *η est bijective.*

Corollaire 1.2.13 *On note*
$S_M^{(\geq 2)} = \{w \in S_M \ / \ |w_i| \geq 2, i \in [p]\} = \{w \in S_M \ / \ w$ *admet une factorisation décroissante*$\}$.
La transformation $\eta_{|S_M^{(\geq 2)}} : S_M^{(\geq 2)} \to T_M^{(\geq 2)}$ est bijective.

1.2.4 Transformation γ

Soit la transformation $\lambda : S_M \to S_M$ définie par :

$$\forall w = x_1 \dots x_{n-1}x_n \in S_M, \ \lambda(w) = x_n x_1 \dots x_{n-1}.$$

Soit $w \in S_M$ de factorisation décroissante $(w_1, w_2, \dots, w_r)$. On définit l'application $\gamma : S_M \to S_M$ par

$$\gamma(w) = \lambda(w_1)\lambda(w_2)\dots\lambda(w_n).$$

<u>*Ex*</u> : $\gamma(23225511442314) = \lambda(23)\lambda(2255)\lambda(114423)\lambda(14) = 32522531144241.$

Proposition 1.2.14 *L'application γ est une bijection de $S_M^{(\geq 2)}$ vers K_M.*

Preuve. Commençons par prouver que si $w \in S_M^{(\geq 2)}$, où w est un mot de longueur n, alors $\gamma(w) \in K_M$. Soit $(w_1, w_2, \dots, w_r)$ la factorisation décroissante de w.

– Si la longueur de tous les w_i est 2, alors avec $w_i = x_{i_1}x_{i_2}$ où $x_{i_1} < x_{i_2}$, nous avons

$$\gamma(w) = x_{1_2}x_{1_1}x_{2_2}x_{2_1}\dots x_{r_2}x_{r_1}.$$

Il existe un plus petit i tel que $x_{i_1} < x_{(i+1)_2}$, quitte à ce que $x_{(i+1)_2} = x_{n+1} = \infty$. i_2 est donc le plus petit ascendant de $\gamma(w)$ qui est un ascendant pair.

– Sinon, soit j le plus petit entier i tel que la longueur de w_i soit strictement supérieure à 2. Le premier ascendant de $\gamma(w) = \lambda(w_1)\lambda(w_2)\ldots\lambda(w_n)$ apparait soit à la seconde lettre de $\lambda(w_j)$, soit à la dernière lettre d'un $\lambda(w_i)$ tel que $i < j$. Dans les deux cas, le facteur contenant le premier ascendant est précédé seulement de facteurs de longueur 2. D'où le premier ascendant de $\gamma(w)$ est pair.

Donc si $w \in S_M^{(\geq 2)}$, alors $\gamma(w) \in K_M$.

Pour montrer la bijectivité de γ, nous décrivons γ^{-1}. Soit $v = v_1v_2\ldots v_n \in K_M$. Il existe $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $v_1 > \cdots > v_{2k} \leq v_{2k+1}$. Soit a_1 la plus petite lettre de v. Soit i_1 l'indice le plus à droite de v tel que $v_{i_1} = a_1$ et $v_{i_1-1} > a_1$.

– Si $i_1 = 2k$, alors $\gamma^{-1}(v) = v_{2k-1}v_1v_2\ldots v_{2k-2}v_{2k}\ldots v_n$.
– Sinon, alors soient w_1' le mot $v_{i_1}v_{i_1+1}\ldots v_n$, v' le mot $v_1v_2\ldots v_{i_1-1}$, a_2 la plus petite lettre de v' et i_2 l'indice le plus à droite de v' tel que $v_{i_2} = a_2$ et $v_{i_2-1} > a_2$.
  – Si $i_2 = 2k$, alors $\gamma^{-1}(v) = v_{2k-1}v_1v_2\ldots v_{2k-2}v_{2k}\ldots v_{i_1-1}w_1'$.
  – Sinon, on réitère l'algorithme jusqu'à l'obtention d'un certain i_{i_k} tel que $i_{i_k} = 2k$.

□

1.2.5 Bijection DW

A partir de la chaîne de bijections suivante :

$$D_n^J \xrightarrow{\Gamma^{-1}} T_M^{(\geq 2)} \xrightarrow{\eta^{-1}} S_M^{(\geq 2)} \xrightarrow{\gamma} K_M \xrightarrow{\mu^{-1}} {}^JK_n,$$

on obtient finalement :

Théorème 1.2.15 *Soit $J \subset [n-1]$:*

$$\#D_n^J = \#^JK_n.$$

Théorème 1.2.16 (Principe d'inclusion-exclusion) *Soient A un ensemble de cardinal n et $A_1, \ldots, A_k$ k parties de A. On a*

$$|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \sum_{\substack{J\subseteq[k]\\|J|=j}} |\bigcap_{i\in J} A_i|.$$

Corollaire 1.2.17 *Soit $J \subset [n-1]$. On a :*

$$|\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma = J\}| = |\{\sigma \in K_n \,|\, IDES\,\sigma = J\}|.$$

Preuve. Soient $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}\}$ et, pour tout $i \in [m-1]$, $J_i = J\backslash\{j_i\}$. Nous avons

$$|\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma = J\}| = |\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma \subseteq J\}| - |\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma \subseteq \bigcup_{i\in[m-1]} J_i\}|.$$

D'après le théorème précédent,

$$|\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma \subseteq J\}| = |\{\sigma \in K_n \,|\, IDES\,\sigma \subseteq J\}|.$$

D'après le principe d'inclusion-exclusion,

$$|\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma \subseteq \bigcup_{i\in[m-1]} J_i\}| = \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{K\subseteq[m-1]\\|K|=k}} |\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma \subseteq \bigcap_{i\in K} J_i\}|.$$

Or d'après le théorème précédent,

$$|\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma \subseteq \bigcap_{i\in K} J_i\}| = |\{\sigma \in K_n \,|\, IDES\,\sigma \subseteq \bigcap_{i\in K} J_i\}|.$$

Et comme

$$\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{K\subseteq[m-1]\\|K|=k}} |\{\sigma \in K_n \,|\, IDES\,\sigma \subseteq \bigcap_{i\in K} J_i\}| = |\{\sigma \in K_n \,|\, IDES\,\sigma \subseteq \bigcup_{i\in[m-1]} J_i\}|,$$

alors

$$|\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma \subseteq \bigcup_{i\in[m-1]} J_i\}| = |\{\sigma \in K_n \,|\, IDES\,\sigma \subseteq \bigcup_{i\in[m-1]} J_i\}|.$$

D'où

$$|\{\sigma \in D_n \,|\, DES\,\sigma = J\}| = |\{\sigma \in K_n \,|\, IDES\,\sigma = J\}|.$$

□

Corollaire 1.2.18 *Il existe une bijection $DW : D_n \rightarrow K_n$ telle que :*

$$\forall \sigma \in D_n,\; IDES \circ DW(\sigma) = DES\,\sigma.$$

1.3 Bijection DW^{loc} de Foata-Han

Soient $\tau \in S_n$ de décomposition fixée $(FIX\,\tau, Der\,\tau)$ et $\sigma \in S_n$ de décomposition pixée $(PIX\,\sigma, Desar\,\sigma)$ telles que

$$(PIX\,\sigma, Desar\,\sigma) = (FIX\,\tau, DW \circ Der\,\tau).$$

On définit la bijection $DW^{loc} : S_n \rightarrow S_n$ par :

$$DW^{loc}(\tau) = \sigma.$$

<u>*Ex*</u> : Soit $\tau = 7\;2\;3\;8\;5\;1\;6\;4\;9 \in S_9$ de décomposition fixée $(\{2,3,5,9\}, 4\;5\;1\;3\;2)$.
On prend $DW(4\;5\;2\;1\;3) = 5\;1\;3\;4\;2$.
La décomposition pixée de σ est $(\{2,3,5,9\}, 5\;1\;3\;4\;2)$ et donc $\sigma = 2\;3\;5\;9\;8\;1\;6\;7\;4$.

Proposition 1.3.1 *$\forall \sigma \in S_n,\; (FIX, maf)\sigma = (PIX, mag)DW^{loc}(\sigma)$.*

Preuve. Il est clair que $FIX\,\tau = PIX\,\sigma$.
De plus $DES(Der\,\tau) = IDES \circ DW(Der\,\tau) = IDES(Desar\,\sigma)$.
Donc,

$$maf\,\tau = \sum_{i \in FIX\,\tau} i - \sum_{i=1}^{fix\,\tau} i + maj \circ Der\,\tau$$

$$= \sum_{i \in PIX\,\sigma} i - \sum_{i=1}^{pix\,\sigma} i + imaj \circ Desar\,\sigma = mag\,\sigma.$$

□

Proposition 1.3.2 $\forall \sigma \in S_n$,

$$(FIX, DEZ)\sigma = (PIX, IDES)DW^{loc}(\sigma)$$

$$(fix, maz)\sigma = (pix, imaj)DW^{loc}(\sigma)$$

Preuve. On a $i \in DEZ\,\tau$ si et seulement si $\tau(i) \neq i$ et l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $\tau(i) > \tau(i+1)$ et $\tau(i+1) \neq i+1$.
2. $\tau(i+1) = i+1$.

Dans le premier cas, les lettres $(ZDer\,\tau)(i)$ et $(ZDer\,\tau)(i+1)$ sont adjacentes dans $Der\,\tau$ et $(ZDer\,\tau)(i) > (ZDer\,\tau)(i+1)$. Comme $DES \circ Der\,\tau = IDES \circ Desar\,\sigma$, la lettre $(ZDer\,\tau)(i+1)$ se situe alors quelque part à gauche de $(ZDer\,\tau)(i)$ dans $Desar\,\sigma$, et donc $i+1$ se situe à gauche de i dans σ, d'où $i \in IDES\,\sigma$.
Dans le second cas, $i+1 \in FIX\,\tau = PIX\,\sigma$ et $(ZDer\,\tau)(i)$ est une lettre de $Desar\,\sigma$. Encore une fois $i \in IDES\,\sigma$.
De même, on prouve que si $i \in IDES\,\sigma$, alors $i \in DEZ\,\tau$.
□

Chapitre 2

Seconde transformation fondamentale de Foata et applications

La seconde transformation fondamentale F_2 de Foata joue un grand rôle en combinatoire, dans le sens où elle relie les deux statistiques mahoniennes bien connues maj et inv. En outre, elle laisse invariant l'ensemble des descentes inverses. Ces propriétés ont été établies par Foata et Schützenberger [6]. Récemment, à partir de F_2, Foata et Han [5] ont construit deux autres bijections F_2' et F_2^{loc} qui leurs ont permis de montrer que (PIX, mag) et (PIX, inv), d'une part, et (pix, inv) et $(pix, imaj)$, d'autre part, sont équidistribuées.

2.1 x-factorisation d'un mot

Si $w \in M_{\mathbb{N}}$ est non vide et $x \in \mathbb{N}$, on note $w \preceq x$ (resp. $w \succ x$) si toutes les lettres de w sont inférieures (resp. strictement supérieures) à x.

Définition 2.1.1 *Soit $x \in \mathbb{N}$. Tout mot non vide $w = w_1 \dots w_n \in M_{\mathbb{N}}$ peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $w = x_1y_1x_2y_2 \dots x_py_p$ où $y_1, \dots, y_p$ sont des lettres de w et $x_1, \dots, x_p$ des mots éventuellement vides tels que si $w_n \leq x$ (resp. $w_n > x$), alors, pour $1 \leq i \leq p$, $y_i \leq x$ (resp. $y_i > x$) et , si $x_i \neq e$, $x_i \succ x$ (resp. $x_i \preceq x$).*
La décomposition $x_1y_1|x_2y_2|\dots|x_py_p$ est appelée x-factorisation de w.

<u>*Ex*</u> : La 4-factorisation de 372285746 est $37|228|5|7|46$.

Soit $x_1y_1|x_2y_2|\dots|x_py_p$ la x-factorisation d'un mot w.
On note $\gamma_x(w)$ le mot $y_1x_1y_2x_2\dots y_px_p$.
Par convention $\gamma_x(e) = e$.
On définit la transformation $\gamma : M_{\mathbb{N}} \to M_{\mathbb{N}}$ par :

$$\forall w = w_1 \dots w_n \in M_{\mathbb{N}}, \gamma(w) = \gamma_{w_n}(w_1 \dots w_{n-1})w_n.$$

Proposition 2.1.2 *γ est bijective.*

Preuve. Soit $w = w_1 \dots w_n \in M_{\mathbb{N}}$.
On peut aussi écrire w sous la forme $w = y_1'x_1'y_2'x_2' \dots y_q'x_q'w_n$ où $y_i' \preceq w_n$ et $x_i' \succ w_n$ si $w_1 \preceq w_n$ (resp. $y_i' \succ w_n$ et $x_i' \preceq w_n$ si $w_1 \succ w_n$).

Posons $\Gamma(w) = x'_1y'_1x'_2y'_2 \ldots x'_qy'_qw_n$.

On a $\gamma \circ \Gamma(w) \quad = \gamma(x'_1y'_1x'_2y'_2 \ldots x'_qy'_qw_n) = \gamma_{w_n}(x'_1y'_1x'_2y'_2 \ldots x'_qy'_q)w_n$

$\qquad = y'_1x'_1y'_2x'_2 \ldots y'_qx'_qw_n = w.$

D'autre part, soit $x_1y_1|x_2y_2| \ldots |x_py_p$ la w_n-factorisation de $w_1 \ldots w_{n-1}$.

Alors $\Gamma \circ \gamma(w) \quad = \Gamma(\gamma_{w_n}(w_1 \ldots w_{n-1})w_n) = \Gamma(y_1x_1y_2x_2 \ldots y_px_pw_n)$

$\qquad = x_1y_1x_2y_2 \ldots x_py_pw_n = w.$

Il en résulte que γ est bijective et $\gamma^{-1} = \Gamma$.

□

2.2 Bijection F_2 de Foata

On définit la transformation F_2 par induction sur la longueur du mot w :

- Si $|w| = 0$ *ou* 1, $F_2(w) = w$.
- Si $w = w_1 \ldots w_n$ $(n > 1)$, $F_2(w) = \gamma(F_2(w_1 \ldots w_{n-1})w_n)$.

Soit $w = w_1 \ldots w_n \in M_{\mathbb{N}}$. On définit les mots $w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}$ par

- $w^{(1)} = w_1$
- $w^{(i)} = \gamma(w^{(i-1)}w_i)$ $(2 \leq i \leq n)$

Comme $w^{(1)} = F_2(w_1)$, on a le résultat suivant :

Proposition 2.2.1 *On a* $F_2(w) = w^{(n)}$.

$\underline{Ex}$: Soit $w = 374122624$. On a successivement

$w^{(1)} = 3$

$w^{(2)} = \gamma(37) = 37$

$w^{(3)} = \gamma(374) = 734$

$w^{(4)} = \gamma(7341) = 7341$

$w^{(5)} = \gamma(73412) = 17342$

$w^{(6)} = \gamma(173422) = 127342$

$w^{(7)} = \gamma(1273426) = 1237426$

$w^{(8)} = \gamma(12374262) = 31274622$

$w^{(9)} = \gamma(312746224) = 312472624$

Ainsi $F_2(w) = 312472624$.

Proposition 2.2.2 $F_2 : M_{\mathbb{N}} \to M_{\mathbb{N}}$ *est une bijection.*

Preuve. Soit $w' = w'_1 \ldots w'_n \in M$. Déterminons $w = w_1 \ldots w_n$ tel que $F_2(w) = w'$. Considérons la transformation Γ et les mots $w^{(i)}$. On a

$$\begin{gathered} w^{(n)} = w' \\ w^{(n-1)}w_n = \Gamma(w') \\ \vdots \\ w^{(k-1)}w_k = \Gamma(w^{(k)}) \\ \vdots \end{gathered}$$

Si t_k est donc la dernière lettre de $\Gamma(w^{(k)})$, $w = t_1 \ldots t_n$.

□

Théorème 2.2.3 *Pour tout $\sigma \in S_n$, on a :*

$$inv\, F_2(\sigma) = maj\, \sigma$$

$$IDES\, F_2(\sigma) = IDES\, \sigma$$

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.4 *Pour tout mot $w = w'w_{n+1} = w_1 \dots w_n w_{n+1}$, on a*

$$inv\, \gamma(w) = inv\, w' + n\chi(w_n > w_{n+1}) \text{ où } \chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{si A est vrai} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, si les lettres w_i sont toutes distinctes, alors

$$IDES\, \gamma(w) = IDES\, w.$$

Preuve du lemme. Soit $x'_1 y'_1 | x'_2 y'_2 | \dots | x'_p y'_p$ la w_{n+1}-factorisation de w'.
On a $\gamma(w) = y'_1 x'_1 y'_2 x'_2 \dots y'_p x'_p w_{n+1}$.

Si $w_n \le w_{n+1}$, $\quad inv\, \gamma(w) = inv\, w - \sum_{i=1}^{p} |x'_1|$
$= inv\, w' + |\{j \le n / w_j > w_{n+1}\}| - \sum_{i=1}^{p} |x'_1|$
$= inv\, w'$.

Si $w_n > w_{n+1}$, $\quad inv\, \gamma(w) = inv\, w + \sum_{i=1}^{p} |x'_1|$
$= inv\, w' + |\{j \le n / w_j > w_{n+1}\}| + \sum_{i=1}^{p} |x'_1|$
$= inv\, w' + n$.

Il en résulte que $inv\, \gamma(w) = inv\, w' + n\chi(w_n > w_{n+1})$.
Supposons maintenant que les w_j soient toutes distinctes et soit $i \in IDES\, \gamma(w)$. Il est clair que si $i = w_{n+1}$, alors $i \in IDES\, w$.
Supposons $i \neq w_{n+1}$. i est donc une lettre d'un certain mot $y'_j x'_j$. Comme $i < i+1 < w_{n+1}$ ou $w_{n+1} < i < i+1$, alors

- si $i = y'_j$, il existe $l < j$ tel que $i + 1 = y'_l$
- si i est une lettre de x'_j, il existe $l \le j$ tel que $i+1$ soit une lettre de x'_l

Dans tous les cas, $i \in IDES\, w$.
On raisonne de même pour l'implication " $i \in IDES\, w \Rightarrow i \in IDES\, \gamma(w)$ ".
□

Preuve du théorème. Montrons par induction sur $|w|$ que $inv\, F_2(w) = maj\, w$.
Il est clair que si $|w| = 1$, $inv\, F_2(w) = maj\, w = 0$.
Supposons que, pour tout mot w' de longueur n, $inv\, F_2(w') = maj\, w'$.
Soit $w = w'x$ où w' est un mot de longueur de n ($w' = w_1 \dots w_n$).

On a $\quad inv\, F_2(w) = inv\, \gamma(F_2(w')x)$
$= inv\, F_2(w') + n\chi(w_n > w_{n+1})$ d'après le lemme
$= maj\, w' + n\chi(w_n > w_{n+1})$ d'après l'hypothèse de recurrence
$= maj\, w$

De plus $\sigma = x_1 \dots x_n$, $\quad IDES\, F_2(\sigma) = IDES\, \gamma(F_2(x_1 \dots x_{n-1})x_n)$
$= IDES\, F_2(x_1 \dots x_{n-1})x_n$
$= IDES\, \gamma(F_2(x_1 \dots x_{n-2})x_{n-1})x_n$
$= IDES\, F_2(x_1 \dots x_{n-2})x_{n-1}x_n$
$= \dots = IDES(x_1 \dots x_n)$ car $F_2(x_1) = x_1$
$= IDES\, \sigma$

□

2.3 Bijections F_2' et F_2^{loc} de Foata-Han

On définit la bijection composée $F_2' : S_n \to S_n$ par :

$$F_2' = i \circ F_2 \circ i \qquad \text{où } i : S_n \to S_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

Proposition 2.3.1 $\forall \sigma \in S_n,\ (pix, imaj)\sigma = (pix, inv)F_2'(\sigma)$.

Preuve. Soit $\sigma \in S_n$. Comme $inv\,\sigma = inv\,\sigma^{-1}$, alors

$$inv\,F_2'(\sigma) = inv\,(F_2(i\,\sigma))^{-1} = inv\,F_2(i\,\sigma) = maj(i\,\sigma) = imaj\,\sigma.$$

D'autre part, puisque $DES\,F_2'(\sigma) = IDES\,F_2(i\,\sigma) = IDES(i\,\sigma) = DES\,\sigma$, alors

$$pix\,F_2'(\sigma) = pix\,\sigma.$$

□

Comme $DES\,F_2'(\sigma) = DES\,\sigma$, alors : $F_2'(K_n) = K_n$.
Ainsi, pour tout $\sigma \in S_n$, il existe un $\rho \in S_n$ et un seul tel que :

$$PIX\,\rho = PIX\,\sigma \text{ et } Desar\,\rho = F_2' \circ Desar\,\sigma.$$

La bijection F_2^{loc} sur S_n est définie par :

$$F_2^{loc}(\sigma) = \rho.$$

Proposition 2.3.2 $\forall \sigma \in S_n,\ (PIX, mag)\sigma = (PIX, inv)F_2'^{loc}(\sigma)$.

Preuve. Il est clair que $PIX\,\sigma = PIX\,\rho$.

Par ailleurs,
$$\begin{aligned} inv \circ Desar\,\rho &= inv \circ F_2'(Desar\,\sigma)\\ &= inv \circ F_2((Desar\,\sigma)^{-1})\\ &= maj\ (Desar\,\sigma)^{-1}\\ &= imaj \circ Desar\,\sigma. \end{aligned}$$

Soit $\{i_1, i_2, \ldots, i_{pix\,\sigma}\} = PIX\,\rho$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_{pix\,\rho}$:

$$mag\,\sigma = \sum_{k \in PIX\,\sigma} k - \sum_{k=1}^{pix\,\sigma} k + imaj \circ Desar\,\sigma$$

$$= \sum_{k=1}^{pix\,\rho} (i_k - k) + inv \circ Desar\,\rho$$

$$= \#\{(i,j) : 1 \le i \le pix\,\rho < j \le n, \rho(i) > \rho(j)\} + \#\{(i,j) : pix\,\rho < i < j \le n, \rho(i) > \rho(j)\}$$

$$= inv\,\rho.$$

Chapitre 3

Transformation Φ de Foata-Han et applications

Dans ce chapitre, on va voir la nouvelle bijection Φ de Foata et Han [4]. A partir de Φ, Foata est Han ont ensuite construit la bijection $\bar{\Phi}$ [5]. De cette dernière bijection, on prouve l'équidistributivité des statistiques (fix, maz) et (fix, maj) et des statistiques (fix, DEZ, Der) et (fix, DES, Der).

3.1 Mots mêlés

Définitions 3.1.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $v \in M_{\mathbb{N}^*}$ un mot de longueur m, $1 \leq m \leq n$. Un mot mêlé de longueur n associé à v est un mot $w = x_1 \dots x_n$ ayant $n - m$ lettres nulles et m lettres non nulles $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$ ($j_1 < \dots < j_m$) telles que $x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m} = v$. En d'autres termes, w est de la forme $w = 0^{\alpha_1} w_1 0^{\alpha_2} w_2 \dots 0^{\alpha_p} w_p 0^{\alpha_{p+1}}$ où les $w_i \in M_{\mathbb{N}^*}$ sont des mots non vides tels que $w_1 w_2 \dots w_p = v$, et les α_i des entiers positifs ou nuls tels que, pour $2 \leq i \leq p$, $\alpha_i \geq 1$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_{p+1} = n - m$.*
On note $Sh(0^{n-m} v)$ l'ensemble des mots mêlés associés à v de longueur n.

Définitions 3.1.2 *Soient $v = v_1 \dots v_m \in S_m$ et $k \in [m]$. La lettre v_k est une excédance (resp. sous-excédance) de v si $v_k > k$ (resp. $v_k < k$).*

Définitions 3.1.3 *Soient $v \in S_m$, $w = x_1 \dots x_n \in Sh(0^{n-m} v)$ et $i \in [n]$. La lettre x_i est une excédance (resp. sous-excédance) de w si $x_i \neq 0$ et x_i est une excédance (resp. sous-excédance) de v.*

<u>*Ex*</u> : $w = 0\,4\,2\,0\,0\,0\,6\,1\,3\,0\,5\,7\,0 \in Sh(0^6 v)$ où $v = 4\,2\,6\,1\,3\,5\,7 \in S_7$. 4 et 6 sont les excédances de v et de w, tandis que $1, 3$ et 5 sont leurs sous-excédances.

3.2 Bijection Φ de Foata-Han

3.2.1 Construction et exemple

Soit $w = 0^{\alpha_1} w_1 0^{\alpha_2} w_2 \dots 0^{\alpha_p} w_p 0^{\alpha_{p+1}} \in Sh(0^{n-m} v),\ v \in D_m$.
Pour $1 \leq k \leq p$, posons $w_k = x_{i_{k-1}+1} \dots x_{i_k}$.
Si $x_{i_{k-1}+1}$ (resp. x_{i_k}) est une sous-excédance de w, soit j_k (resp. l_k) le plus grand (resp. petit)

entier tel que $i_{k-1} < j_k \leq i_k$ (resp. $i_{k-1} < l_k \leq i_k$) et $x_{i_{k-1}+1} < x_{i_{k-1}+2} < \cdots < x_{j_k} < j_k$ (resp. $l_k > x_{l_k} > x_{l_k+1} > \cdots > x_{i_k}$).
Posons $t_k = x_{l_k} \ldots x_{i_k}$ et $u_k = \begin{cases} x_{i_{k-1}+1} \ldots x_{j_k} & \text{si } j_k < l_k \\ x_{i_{k-1}+1} \ldots x_{j_k-1} & \text{si } j_k = l_k \end{cases}$.
Ainsi pour tout $1 \leq k \leq p$, w_k peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $u_k z_k t_k$.
Notons que si x_{i_k} est une sous-excédance de w, t_k est un sous-mot décroissant maximal de w_k.
De même, si $x_{i_{k-1}+1}$ est une sous-excédance de w et $z_k \neq e$, u_k est un sous-mot croissant maximal de w_k.
Alors w peut s'écrire :

$$w = 0^{\alpha_1} u_1 z_1 t_1 0^{\alpha_2} u_2 z_2 t_2 \ldots 0^{\alpha_p} u_p z_p t_p 0^{\alpha_{p+1}}.$$

Pour tout $w \in M_{\mathbb{N}}$, on désigne par $F(w)$ (resp. $L(w)$) la première lettre (resp. dernière lettre) de w. Si $|w|$, $F(w) = L(w)$.
Posons alors $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_{p+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_{p+1} = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$,

$$\epsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{si } t_{i-1} = e \text{ ou } (u_i \neq e \text{ et } L(t_{i-1}) > F(u_i)) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2 \leq i \leq p,$$

puis $\alpha'_i = \alpha_i - \epsilon_i$.
De plus, si $t_i \neq e$, posons $t_i = a_i b_i$, où $a_i = F(t_i)$.
La bijection Φ construite par Foata et Han de façon inductive peut être définie par :

$$\Phi(w) = w'_1 w'_2 \ldots w'_p 0^{\alpha'_{p+1}}$$

$$\text{où } w'_i = \begin{cases} a_i 0^{\alpha'_i} b_i & \text{si } u_i = e,\ z_i = e,\ u_{i+1} \neq e \text{ et } L(t_i) > F(u_{i+1}) \\ u_i 0^{\alpha'_i} z_i 0^{\epsilon_{i+1}} a_i b_i & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>*Ex*</u> : Soit $w = 5\ 0\ 0\ 3\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1\ 6\ 4\ 0\ 0$.
On a le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5
α_i	0	2	1	3	2
ϵ_i	0	1	0	0	1
u_i	e	e	e	1	
z_i	5	3	e	6	
t_i	e	e	2	4	
w'_i	50	03	20	1000604	

D'où $\Phi(w) = 5\ 0\ 0\ 3\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 6\ 0\ 4\ 0$.

3.2.2 Propriétés

Proposition 3.2.1 *Soit $v \in D_m$. $\Phi : Sh(0^{n-m}v) \to Sh(0^{n-m}v)$ est bijective.*

Preuve. Soit $w = 0^{\alpha_1} w_1 0^{\alpha_2} w_2 \ldots 0^{\alpha_p} w_p 0^{\alpha_{p+1}} \in Sh(0^{n-m}v),\ v \in D_m$.
Pour $1 \leq k \leq p$, posons $w_k = x_{i_{k-1}+1} \ldots x_{i_k}$.

Si $x_{i_{k-1}+1}$ (resp. x_{i_k}) est une sous-excédance de w, soit j_k (resp. h_k) le plus grand (resp. petit) entier tel que $i_{k-1} < j_k \leq i_k$ (resp. $i_{k-1} < h_k \leq i_k$) et $x_{i_{k-1}+1} > x_{i_{k-1}+2} > \cdots > x_{j_k} < j_k$ (resp. $h_k > x_{h_k} < x_{l_k+1} < \cdots < x_{i_k}$).
Posons $v_k = x_{i_{k-1}+1} \dots x_{j_k}$ et $u_k = \begin{cases} x_{h_k} \dots x_{i_k} & \text{si } j_k < h_k \\ x_{h_k+1} \dots x_{i_k} & \text{si } j_k = h_k \end{cases}$.
Ainsi pour tout $1 \leq k \leq p$, w_k peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $v_k z_k l_k$.
Alors w peut s'écrire :

$$w = 0^{\alpha_1} v_1 z_1 l_1 0^{\alpha_2} v_2 z_2 l_2 \dots 0^{\alpha_p} v_p z_p l_p 0^{\alpha_{p+1}}.$$

Posons alors $\epsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_1 = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, $\epsilon_{p+1} = 0$,

$$\epsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i = e \text{ ou } (v_i \neq e \text{ et } L(l_{i-1}) > F(v_i)) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2 \leq i \leq p,$$

puis $\alpha'_i = \alpha_i - \epsilon_i$.
De plus, si $v_i \neq e$, posons $v_i = b_i c_i$, où $c_i = L(v_i)$. Alors :

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(w) = 0^{\alpha'_1} w'_1 w'_2 \dots w'_p$$

$$\text{où } w'_i = \begin{cases} b_i 0^{\alpha'_{i+1}} c_i & \text{si } z_i = e,\ l_i = e,\ l_{i-1} \neq e \text{ et } L(l_{i-1}) > F(v_i) \\ b_i c_i 0^{\epsilon_i} z_i 0^{\alpha'_{i+1}} l_i & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Définition 3.2.2 *Soit $w = x_1 x_2 \dots x_n$ un mot de $\mathbb{N}$. On dit que $i \in [n]$ est un ascendant de w si $x_i \leq x_{i+1}$, où par convention $x_{n+1} = \infty$.*
On note $RISE\, w$ l'ensemble $\{i : 1 \leq i \leq n, x_i \leq x_{i+1}\}$ des ascendants de w.

Définition 3.2.3 *Soit $w = x_1 \dots x_n \in Sh(0^{n-m}v)$, $v \in D_m$.*
On note $RISE^{\bullet}\, w$ l'ensemble des entiers i, $i \in [n]$, vérifiant l'une des conditions suivantes :

1. $0 < x_i < x_{i+1}$;
2. $x_i = x_{i+1} = 0$;
3. $x_i = 0$ *et* x_{i+1} *est une excédance de* w ;
4. x_i *est une sous-excédance de* w *et* $x_{i+1} = 0$.

où, par convention $x_{n+1} = \infty$.
Notons que $n \in RISE^{\bullet}\, w$.

Théorème 3.2.4 *Soit $w \in Sh(0^{n-m}v)$, $v \in D_m$:*

$$RISE\, w = RISE^{\bullet}\, \mathbf{\Phi}(w).$$

Preuve. Soient $w = x_1 x_2 \dots x_n$, $\mathbf{\Phi}(w) = y_1 y_2 \dots y_n$, $u_j = u_j^1 \dots u_j^r$ et $z_j = z_j^1 \dots z_j^s$.
On a :

$$i \in RISE\, w \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x_ix_{i+1}=00 \\ \text{ou} \\ x_ix_{i+1}=0F(u_j) \\ \text{ou} \\ x_ix_{i+1}=u_j^ku_j^{k+1} \\ \text{ou} \\ x_ix_{i+1}=L(u_j)F(z_j),\ F(z_j)\ \text{excédant} \\ \text{ou} \\ x_ix_{i+1}=z_j^kz_j^{k+1} \\ \text{ou} \\ x_ix_{i+1}=L(z_j)a_j \\ \text{ou} \\ x_ix_{i+1}=0a_j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y_iy_{i+1}=u_j^ku_j^{k+1} \\ \text{ou} \\ y_iy_{i+1}=L(t_{j-1})F(u_j) \\ \text{ou} \\ y_iy_{i+1}=00 \\ \text{ou} \\ y_iy_{i+1}=0F(z_j),\ F(z_j)\ \text{excédant} \\ \text{ou} \\ y_iy_{i+1}=z_j^kz_j^{k+1} \\ \text{ou} \\ y_iy_{i+1}=L(z_j)0 \\ \text{ou} \\ y_iy_{i+1}=a_j0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow i \in RISE^{\bullet}\,\mathbf{\Phi}(w).$$

□

Proposition 3.2.5 *Soit $\sigma \in S_n$. On a*

$$RISE\,\sigma = RISE^{\bullet}\,ZDer(\sigma).$$

Preuve. Soient $\sigma = x_1x_2\dots x_n$ et $ZDer\,\sigma = x'_1x'_2\dots x'_n$.

Comme $0 < x'_i < x'_{i+1} \Leftrightarrow 0 < x_i < x_{i+1},\ x_i \neq i,\ x_{i+1} \neq i+1$

$x'_i = x'_{i+1} = 0 \Leftrightarrow x_i = i,\ x_{i+1} = i+1$

$x'_i = 0,\ x'_{i+1}$ est une excédance $\Leftrightarrow x_i = i,\ x_{i+1} > i+1$

x'_i est une sous-excédance, $x'_{i+1} = 0 \Leftrightarrow x_i < i,\ x_{i+1} = i+1$

Alors $i \in RISE^{\bullet}\,ZDer(\sigma) \Leftrightarrow i \in RISE\,\sigma$.

□

3.3 Bijection $\bar{\Phi}$ de Foata-Han

Définitions 3.3.1 *Soit $w = x_1\dots x_n \in M_{\mathbb{N}}$. On définit*

$$Zero\,w := \{i \in [n],\ x_i = 0\};$$

$$zero\,w := \#Zero\,w.$$

Définition 3.3.2 *Soit $w = 0^{r_0}v_10^{r_1}v_20^{r_2}\dots v_k0^{r_k} \in M_{\mathbb{N}}$ tel que $r_0,\dots,r_k \geq 0$ et $v_1,\dots,v_k \in M_{\mathbb{N}^*}$. On définit :*

$$Pos\,w := v_1v_2\dots v_k.$$

Le mot $w \in M_{\mathbb{N}}$ est caractérisé par : $(Zero\,w, Pos\,w)$.

Définition 3.3.3 *On définit l'ensemble S_n^{Der} par*

$$S_n^{Der} := \bigcup_{(m,v)} Sh(0^{n-m}v),$$

la réunion s'effectuant sur tous les couples (m,v) tels que $0 \leq m \leq n$ et $v \in D_m$.

Proposition 3.3.4 *$ZDer$ est une bijection de S_n vers S_n^{Der}.*

Preuve. Par construction, $ZDer$ est une application de S_n vers S_n^{Der}.
Soient $w \in S_n^{Der}$ et $\sigma \in S_n$ telle que $(FIX\,\sigma,\ Der\,\sigma) = (Zero\,w,\ Pos\,w)$:

$$ZDer^{-1}\,w = \sigma.$$

□

On définit la bijection $\bar{\Phi} : S_n \to S_n$ par la chaîne suivante :

$$\bar{\Phi} : \begin{array}{c} S_n \to S_n^{Der} \to S_n^{Der} \to S_n \\ \sigma \overset{ZDer}{\mapsto} w \overset{\mathbf{\Phi}}{\mapsto} w' \overset{ZDer^{-1}}{\mapsto} \sigma'. \end{array}$$

<u>*Ex*</u> : Soit $\sigma = 8\ 1\ \mathbf{3}\ \mathbf{4}\ 7\ 5\ 2\ 6\ \mathbf{9} \in S_n$.

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\sigma) &= ZDer^{-1} \circ \mathbf{\Phi} \circ ZDer(8\ 1\ \mathbf{3}\ \mathbf{4}\ 7\ 5\ 2\ 6\ \mathbf{9}) \\ &= ZDer^{-1} \circ \mathbf{\Phi}(6\ 1\ 0\ 0\ 5\ 3\ 2\ 4\ 0) \\ &= ZDer^{-1}(6\ 0\ 1\ 0\ 5\ 3\ 2\ 0\ 4) \\ &= 9\ 2\ 1\ 4\ 7\ 5\ 3\ 8\ 6. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.5 *$\forall \sigma \in S_n$,*

$$(fix, DEZ, Der)\sigma = (fix, DES, Der)\bar{\Phi}(\sigma),$$

$$(fix, maz)\sigma = (fix, maj)\bar{\Phi}(\sigma).$$

Preuve. D'une part,
$$\begin{aligned} (fix\,\sigma, Der\,\sigma) &= (zero\,w, Pos\,w) \\ &= (zero\,w', Pos\,w') \\ &= (fix\,\sigma', Der\,\sigma'). \end{aligned}$$

D'autre part,
$$\begin{aligned} RISE\,ZDer(\sigma) &= RISE^{\bullet}\,\mathbf{\Phi}(ZDer(\sigma)) \\ &= RISE^{\bullet}\,ZDer(ZDer^{-1}(\mathbf{\Phi}(ZDer(\sigma)))) \\ &= RISE\,ZDer^{-1}(\mathbf{\Phi}(ZDer(\sigma))) \\ &= RISE\,\sigma'. \end{aligned}$$

Comme $DEZ\,\sigma = [n]\backslash RISE\,ZDer(\sigma)$ et $DES\,\sigma' = [n]\backslash RISE\,\sigma'$,
alors $DEZ\,\sigma = DES\,\sigma'$.

□

Chapitre 4

Transformation $\mathbf{F_3}$ de Foata-Han et applications

Dans ce chapitre, on va voir la nouvelle bijection $\mathbf{F_3}$ de Foata et Han [4]. Foata et Han ont ensuite prolongé cette bijection en une bijection $\bar{F}_3$ et en une bijection $\bar{F}'_3$ [5]. On obtient aussi la bijection CHZ de Clarke, Han et Zeng [1] à partir de $\mathbf{F_3}$. Ce n'est qu'à partir de $\bar{F}_3$ que l'on prouve l'équidistributivité des statistiques (fix, maf, Der) et (fix, maz, Der), de $\bar{F}'_3$ que l'on prouve l'équidistributivité des statistiques $(pix, mag, Desar)$ et $(pix, imaj, Desar)$, puis de CHZ que l'on prouve l'équidistributivité des statistiques (fix, maj, Der) et (fix, maf, Der). Enfin, les bijections $\bar{F}_3$ et $\bar{F}'_3$ commutent dans le sens du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{DW^{loc}} & S_n \\ {\scriptstyle \bar{F}_3}\Big\uparrow & & {\scriptstyle \bar{F}'_3}\Big\uparrow \\ S_n & \xrightarrow{DW^{loc}} & S_n \end{array}$$

4.1 Notation de Clarke-Han-Zeng

Notation 4.1.1 *Soient $w = x_1 \ldots x_n \in M_{\mathbb{N}}$ et $i \in [n]$.*

$$w_{(i)} = x_1 \ldots x_i \text{ et } w^{(i)} = x_i \ldots x_n.$$

Définition 4.1.2 *Soit $w = 0^{m_0} w_1 0^{m_1} w_2 0^{m_2} \ldots w_p 0^{m_p} \in M_{\mathbb{N}}$ tel que $w_i \in M_{\mathbb{N}^*}$.*
On pose $j_i = |w_1 w_2 \ldots w_i|$ $(1 \leq i \leq p)$.
La notation de Clarke-Han-Zeng du mot w est :

$$(w_1 \ldots w_p,\ 0^{m_0} j_1^{m_1} j_2^{m_2} \ldots j_p^{m_p}).$$

<u>*Ex*</u> : Soit $w = 0\ 4\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 5\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0\ 0$.
Avec la notation de Clarke-Han-Zeng,

$$w = (4\ 1\ 3\ 5\ 5\ 1,\ 0^1 1^2 2^2 3^2 4^1 6^3).$$

Dans la suite, nous utilisons cette notation.

Définition 4.1.3 *Soit $w \in M_{\mathbb{N}}$. On définit $mafz\,w$ par :*

$$mafz\,w = \sum_{i \in Zero\,w} i - \sum_{i=1}^{zero\,w} i + maj\,Pos\,w.$$

Si $w = (Pos\,w,\ 0^{m_0} j_1^{m_1} j_2^{m_2} \dots j_p^{m_p})$, alors

$$mafz\,w = maj\,Pos\,w + \sum_{i=1}^{p} j_i m_i.$$

Proposition 4.1.4 *Soient $w = x_1 \dots x_n \in M_{\mathbb{N}^*}$, $DES\,w \cup \{0\} = \{i_0, i_1, \dots, i_g\}$ ($i_0 < i_1 < \dots < i_g$) et $RISE\,w = \{j_{g+1}, j_{g+2}, \dots, j_n\}$ ($j_{g+1} < j_{g+2} < \dots < j_n$).*
A chaque descente i_l (resp. montée j_{g+l}) on affecte la valeur $g - l$ (resp. $g + l$) que l'on notera g_{i_l} (resp. $g_{j_{g+l}}$). A i_0 on affecte la valeur $g_{i_0} = des\,w$. On a :

$$maj(w, l) - maj\,w = g_l.$$

Preuve. Si $j \in \{0\} \cup DES\,w$, $maj(w, j) - maj\,w = des\,w^{(j+1)} = g_j$.
Si $j \in RISE\,w$,

$$\begin{aligned} maj(w,j) - maj\,w &= j + des\,w^{(j+1)} \\ &= j - des\,w_{(j)} + des\,w_{(j)} + des\,w^{(j+1)} \\ &= j - des\,w_{(j)} + g \\ &= g_j \end{aligned}$$

□

4.2 Bijection $\mathbf{F_3}$ de Foata-Han

4.2.1 Construction et exemple

Soit $(w,\ j_1^{m_1} j_2^{m_2} \dots j_p^{m_p}) \in M_{\mathbb{N}}$, $w \in M_{\mathbb{N}^*}$.
$j_1^{m_1} j_2^{m_2} \dots j_p^{m_p}$ peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $d_1 r_1 d_2 r_2 \dots d_q r_q$ avec

- $d_i = f_{i,1} f_{i,2} \dots f_{i,k_i}$;
- $r_i = h_{i,1}^{b_{i,1}} h_{i,2}^{b_{i,2}} \dots h_{i,l_i}^{b_{i,l_i}}$.

où $f_{i,j} \in DES\,w \cup \{0\}$ et $h_{i,j} \in RISE\,w$.
On pose

$$\begin{array}{lll} \overline{f}_{i,m} = g_{f_{i,m}} + \sum_{j=i}^{p} l_j & \text{et} & D_i = \overline{f}_{i,k_i} \dots \overline{f}_{i,2} \overline{f}_{i,1}, \\ \underline{h}_{i,m} = g_{h_{i,m}} - h_{i,m} + \sum_{j=i+1}^{p} l_j + l_i - m & \text{et} & R_i = \underline{h}_{i,l_i}^{b_{i,l_i}-1} \dots \underline{h}_{i,2}^{b_{i,2}-1} \underline{h}_{i,1}^{b_{i,1}-1}, \\ \overline{h}_{i,m} = \underline{h}_{i,m} + h_{i,m} & \text{et} & \mathbf{R}_i = \overline{h}_{i,1} \overline{h}_{i,2} \dots \overline{h}_{i,l_i}, \end{array}$$

et $R_q\, D_q \dots R_2\, D_2\, R_1\, D_1\, \mathbf{R}_1\, \mathbf{R}_2 \dots \mathbf{R}_q = j_1'^{m_1'} j_2'^{m_2'} \dots j_{p'}'^{m_{p'}'}$.
Si $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$, on définit $\mathbf{F_3} : Sh(0^m w) \to Sh(0^m w)$ par :

$$\mathbf{F_3}(w,\ j_1^{m_1} j_2^{m_2} \dots j_p^{m_p}) = (w,\ j_1'^{m_1'} j_2'^{m_2'} \dots j_{p'}'^{m_{p'}'})$$

$\underline{Ex}$: Soient $w = (4\ 1\ 1\ 3\ 5\ 2\ 1)$ et $j_1^{m_1} j_2^{m_2} \dots j_p^{m_p} = 01^3 34^2 5$.
Comme $DES\, w = \{1, 5, 6\}$ et $RISE\, w = \{2, 3, 4, 7\}$, alors

$$(g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7) = (3, 2, 4, 5, 6, 1, 0, 7)$$

et $01^3 34^2 5 = d_1 r_1 d_2$ où $d_1 = 0111$, $r_1 = 34^2$ et $d_2 = 5$.
On a donc :

$$D_1 = (2+2)(2+2)(2+2)(3+2) = 4^3 5$$
$$R_1 = (6-4)^{2-1} = 2 \qquad \mathbf{R}_1 = (5+1)6 = 6^2$$
$$D_2 = 1$$

D'où $\mathbf{F_3}(w,\ 01^3 34^2 5) = (w,\ D_2 R_1 D_1 \mathbf{R}_1) = (w,\ 124^3 56^2)$.

4.2.2 Propriétés

Proposition 4.2.1 *Soient $w_1, w_2 \in M_{\mathbb{N}}$ deux mots de même longueur.*
Si $Zero\, w_1 = Zero\, w_2$ et si $DES\ Pos\, w_1 = DES\ Pos\, w_2$, alors

$$Zero\ \mathbf{F_3}(w_1) = Zero\ \mathbf{F_3}(w_2).$$

Preuve. Se déduit de la construction de $\mathbf{F_3}$.
□

Proposition 4.2.2 $\mathbf{F_3} : Sh(0^m w) \to Sh(0^m w)$ *est bijective.*

Preuve. On montre par récurrence sur m que $\mathbf{F_3}$ est surjective.
Soient $a, l_a \in \{0\} \cup [|w|]$ tels que $g_{l_a} = a$
et $u, U \in M_{\mathbb{N}}$ tels que $|u| = |U| = m$ et $(w, U) = \mathbf{F_3}(w, u)$:
- Si $a \le des\, w$, alors
$$(w, Ua) = \mathbf{F_3}(w, l_a u);$$
- Si $a > des\, w$, alors si $U = (a - l_a)^\alpha U',\ U' = x_1 \dots x_n$,
$U'' = (x_1 - 1) \dots (x_n - 1)$ et $(w, U'') = \mathbf{F_3}(w, u'')$:
$$(w, Ua) = \mathbf{F_3}(w, u'' l_a^{\alpha+1}).$$

□

Théorème 4.2.3 *Soit $(w, u) \in Sh(0^m w)$. On a*

$$maj\,(w, u) = mafz\, \mathbf{F_3}(w, u).$$

Preuve. On procède par récurrence sur m.
Si $m = 0$, $\mathbf{F_3}(w) = w$.
Soient $a, l_a \in \{0\} \cup [|w|]$ tels que $g_{l_a} = a$
et $u, U \in M_{\mathbb{N}}$ tels que $|u| = |U| = m$ et $\mathbf{F_3}(w, u) = (w, U)$:
- Si $a \le des\, w$, alors

$$maj(w, ul_a) = maj(w, u) + des\, w^{(l_a+1)} = mafz(w, U) + a = mafz(w, aU).$$

– Si $a > des\, w$, alors si $\mathbf{F_3}(w, u'') = (w, U'')$, $U'' = x_1 \dots x_n$, $U' = (x_1+1)\dots(x_n+1)$ et $U = (a - l_a)^{\alpha} U'$:

$$\begin{aligned} maj(w, u'' l_a^{\alpha+1}) &= maj(w, u'') + (l_a + des\, w^{(l_a+1)} + |u''|) + \alpha des\, w^{(l_a+1)} \\ &= maf(w, U'') + (a + |U''|) + \alpha des\, w^{(l_a+1)} = maf(w, U') + a + \alpha(a - l_a) \\ &= maf(w, \alpha(a - l_a) U' a). \end{aligned}$$

□

4.3 Bijection CHZ de Clarke-Han-Zeng

On définit la bijection $CHZ : S_n \to S_n$ par la chaîne suivante :

$$CHZ : \begin{array}{c} S_n \to S_n \to S_n^{Der} \to S_n^{Der} \to S_n \\ \sigma \overset{\Phi^{-1}}{\mapsto} \sigma' \overset{ZDer}{\mapsto} w \overset{\mathbf{F_3}}{\mapsto} w' \overset{ZDer^{-1}}{\mapsto} \sigma''. \end{array}$$

Proposition 4.3.1 $\forall \sigma \in S_n,\ (fix, maj, Der)\sigma = (fix, maf, Der) CHZ(\sigma).$

Preuve. On a : $$\begin{aligned} (fix\,\sigma, maj\,\sigma, Der\,\sigma) &= (fix\,\sigma', maz\,\sigma', Der\,\sigma') \\ &= (zero\, w, maj\, w, Pos\, w) \\ &= (zero\, w', mafz\, w', Pos\, w') \\ &= (fix\,\sigma'', maf\,\sigma'', Der\,\sigma'') \end{aligned}$$

□

4.4 Bijections $\bar{F}_3$ et $\bar{F}'_3$ de Foata-Han

On définit la bijection $\bar{F}_3 : S_n \to S_n$ par la chaîne suivante :

$$\bar{F}_3 : \begin{array}{c} S_n \to S_n^{Der} \to S_n^{Der} \to S_n \\ \sigma \overset{ZDer}{\mapsto} w \overset{\mathbf{F_3}}{\mapsto} w' \overset{ZDer^{-1}}{\mapsto} \sigma'. \end{array}$$

<u>*Ex*</u> : Soit $\sigma = 6\ \mathbf{2}\ 7\ 3\ 9\ 5\ 1\ \mathbf{8}\ 4 \in S_n$.

$$\begin{aligned} \bar{F}_3(\sigma) &= ZDer^{-1} \circ \mathbf{F_3} \circ ZDer(6\ \mathbf{2}\ 7\ 3\ 9\ 5\ 1\ \mathbf{8}\ 4) \\ &= ZDer^{-1} \circ \mathbf{F_3}(5\ 0\ 6\ 2\ 7\ 4\ 1\ 0\ 3) \\ &= ZDer^{-1}(5\ 6\ 2\ 7\ 4\ 0\ 1\ 0\ 3) \\ &= 5\ 7\ 2\ 9\ 4\ 6\ 1\ 8\ 3. \end{aligned}$$

Proposition 4.4.1 $\forall \sigma \in S_n,\ (fix, maz, Der)\sigma = (fix, maf, Der)\bar{F}_3(\sigma).$

Preuve. On a : $$\begin{aligned} (fix, maz, Der)\sigma &= (zero, maj, Pos) ZDer\,\sigma \\ &= (zero,\ mafz, Pos)\mathbf{F_3}(ZDer\,\sigma) \\ &= (fix, maf, Der) ZDer^{-1}\, \mathbf{F_3}(ZDer\,\sigma) \\ &= (fix, maf, Der)\bar{F}_3(\sigma). \end{aligned}$$

□

Définition 4.4.2 *Soient $\sigma = x_1 \dots x_n \in S_n$ et $\{i_1, \dots, i_m\} = [n] \backslash PIX\,\sigma$, $i_1 \le \dots \le i_m$. On définit le mot $ZDesar\,\sigma$ par : Si $ZDesar\,\sigma = x'_1 \dots x'_n$, alors*

$$\begin{cases} (Desar\,\sigma)^{-1} = x'_{i_1} \dots x'_{i_m} \\ x'_i = 0 \quad \text{si } i \notin \{i_1, \dots, i_m\} \end{cases}$$

Définition 4.4.3 *On définit l'ensemble S_n^{Desar} par*

$$S_n^{Desar} = \bigcup_{(m,v)} Sh(0^{n-m}v),$$

la réunion s'effectuant sur tous les couples (m, v) tels que $0 \leq m \leq n$ et $v^{-1} \in K_m$.

Proposition 4.4.4 *$ZDesar$ est une bijection de S_n vers S_n^{Desar}.*

Preuve. Par construction, $ZDesar$ est une application de S_n vers S_n^{Desar}.
Soient $w \in S_n^{Desar}$ et $\sigma \in S_n$ telle que $(PIX\,\sigma,\ Desar\,\sigma) = (Zero\,w,\ (Pos\,w)^{-1})$:

$$ZDesar^{-1}\,w = \sigma.$$

□

Soient $\sigma \in S_n$ et $w = ZDesar\,\sigma = x_1 \ldots x_n$.
D'une part, $i \in IDES\,\sigma \Leftrightarrow i \notin PIX\,\sigma + 1\ et\ \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(i+1)$
$\Leftrightarrow x_i \geq 1\ et\ x_i > x_{i+1} \Leftrightarrow i \in DES\,w : IDES\,\sigma = DES\,w.$
D'autre part,

$$mag\,\sigma = \sum_{i \in PIX\,\sigma} i - \sum_{i=1}^{pix\,\sigma} i + imaj \circ Desar\,\sigma$$

$$= \sum_{i \in Zero\,w} i - \sum_{i=1}^{zero\,w} i + maj \circ Pos\,w = mafz\,w.$$

On définit la bijection $\bar{F}'_3 : S_n \to S_n$ par la chaîne suivante :

$$\bar{F}'_3 : \begin{array}{c} S_n \to S_n^{Desar} \to S_n^{Desar} \to S_n \\ \sigma \overset{ZDesar}{\mapsto} w \overset{\mathbf{F_3}}{\mapsto} w' \overset{ZDesar^{-1}}{\mapsto} \sigma'. \end{array}$$

Proposition 4.4.5 $\forall \sigma \in S_n,\ (pix, imaj, Desar)\sigma = (pix, mag, Desar)\bar{F}'_3(\sigma).$

Preuve. Soit $\sigma \in S_n$. On a :

$$(pix\,\sigma,\ imaj\,\sigma,\ Desar\,\sigma) = (zero\ ZDesar\,\sigma,\ maj\ ZDesar\,\sigma,\ (Pos\ ZDesar\,\sigma)^{-1})$$

$$= (zero\ \mathbf{F_3}(ZDesar\,\sigma),\ mafz\ \mathbf{F_3}(ZDesar\,\sigma),\ (Pos\ \mathbf{F_3}(ZDesar\,\sigma))^{-1})$$

$$= (pix\ ZDesar^{-1}\,\mathbf{F_3}(ZDesar\,\sigma),\ mag\ ZDesar^{-1}\,\mathbf{F_3}(ZDesar\,\sigma)$$

$$,\ Desar\ ZDesar^{-1}\,\mathbf{F_3}(Desar\,\sigma))$$

$$= (pix\,\bar{F}'_3(\sigma),\ mag\,\bar{F}'_3(\sigma),\ Desar\,\bar{F}'_3(\sigma)).$$

□

4.5 Démonstration de $\bar{F}_3 \circ DW^{loc} = DW^{loc} \circ \bar{F}'_3$

Soient $w \in S_n^{Der}$ et $\sigma \in S_n$ telle que : $(FIX\, \sigma, Der\, \sigma) = (Zero\, w, Pos\, w)$.
Soit $\sigma' \in S_n$ telle que $\sigma' = DW^{loc}(\sigma)$:

$$(PIX\, \sigma', Desar\, \sigma') = (FIX\, \sigma, DW(Der\, \sigma)) = (Zero\, w, DW(Pos\, w)).$$

Il existe $w' \in S_n^{Desar}$ tel que :

$$(Zero\, w', Pos\, w') = (PIX\, \sigma', (Desar\, \sigma')^{-1}) = (Zero\, w, (DW(Pos\, w))^{-1}).$$

On définit la transformation $dw : S_n^{Der} \to S_n^{Desar}$ par :

$$dw(w) = w'.$$

Proposition 4.5.1 $dw = ZDesar \circ DW^{loc} \circ ZDer^{-1}$ *est bijective.*

Comme $Zero\, w = Zero\, dw(w)$ et
$DES\ Pos\, w = IDES\ DW(Pos\, w) = DES\ (DW(Pos\, w))^{-1} = DES\ Pos\, dw(w)$,
alors $Zero\ \mathbf{F_3}(w) = Zero\ \mathbf{F_3}(dw(w))$. D'où :

$$Zero\ dw(\mathbf{F_3}(w)) = Zero\ \mathbf{F_3}(w) = Zero\ \mathbf{F_3}(dw(w)).$$

Part ailleurs, $Pos\ dw(\mathbf{F_3}(w)) = (DW(Pos\, \mathbf{F_3}(w)))^{-1} = (DW(Pos\, w))^{-1}$ et
$Pos\ \mathbf{F_3}(dw(w)) = Pos\ dw(w) = (DW \circ Pos\, w)^{-1}$.
D'où :

$$Pos\ dw(\mathbf{F_3}(w)) = (DW \circ Pos\, w)^{-1} = Pos\ \mathbf{F_3}(dw(w)).$$

Par conséquent :

$$(Zero\ dw(\mathbf{F_3}(w)), Pos\ dw(\mathbf{F_3}(w))) = (Zero\ \mathbf{F_3}(dw(w)), Pos\ \mathbf{F_3}(dw(w)))$$

et

$$dw \circ \mathbf{F_3} = \mathbf{F_3} \circ\ dw.$$

Ce qui implique :

$$ZDesar^{-1} \circ dw \circ \mathbf{F_3} \circ ZDer = ZDesar^{-1} \circ \mathbf{F_3} \circ\ dw \circ ZDer$$

$$ZDesar^{-1} \circ ZDesar \circ DW^{loc} \circ ZDer^{-1} \circ \mathbf{F_3} \circ ZDer$$

$$= ZDesar^{-1} \circ \mathbf{F_3} \circ\ ZDesar \circ DW^{loc} \circ ZDer^{-1} \circ ZDer$$

$$DW^{loc} \circ \bar{F}'_3 = \bar{F}_3 \circ DW^{loc}.$$

Proposition 4.5.2 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r, "DW^{loc}"] & S_n \\
S_n \arrow[u, "\bar{F}_3"] \arrow[r, "DW^{loc}"] & S_n \arrow[u, "\bar{F}'_3"']
\end{tikzcd}$$

Conclusion

L'équidistributivité des statistiques ou des n-uplets de statistiques sur le groupe symétrique nécessite soit l'utilisation des bijections classiques, soit la construction de nouvelles bijections. Mais il n'est pas toujours facile de trouver de telles bijections. Souvent les bijections trouvées ont été construites par induction, c'est le cas de toutes les bijections de ce mémoire, à l'exception de la bijection DW. Nous avons réussi à trouver les formes explicites de certaines d'entre elles, entre autre, les bijectionss CHZ, $\mathbf{\Phi}$ et $\mathbf{F_3}$. La détermination de ces formes explicites nous a permis de faciliter la démonstration de l'équidistributivité des uplets de statistiques qui était l'objectif de ce mémoire.
Notons enfin que la bijection $\mathbf{F_3}$ a encore une autre forme plus simple. Elle peut être définie comme suit :
Soit A une proposition :

$$\chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est vraie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $w = 0^{m_1}w_1 0^{m_2}w_2 \ldots 0^{m_p}w_p 0^{m_{p+1}}$. Posons

$$\epsilon_1 = 0 \ , \ \epsilon_{p+1} = \chi(m_{p+1} > 0)$$

$$\epsilon_i = \chi(L(w_{i-1}) \leq F(w_i)), \ 2 \leq i \leq p$$

puis $m'_i = m_i - \epsilon_i$.
$v = w_1 w_2 \ldots w_p$ peut s'écrire $v = w'_p w'_{p-1} \ldots w'_1 w''_1 \ldots w''_p$ où

$$|w'_p| = des\, w_p + \chi(m_{p+1} > 0)$$

$$|w'_i| = des\, w_i + 1, \ 1 \leq i < p$$

$$|w''_i| = |w_i| - |w'_i|, \ 1 \leq i \leq p$$

On définit :

$$\mathbf{F_3}(w) = 0^{m'_{p+1}} w'_p 0^{m'_p} \ldots 0^{m'_2} w'_1 0^{m'_1} w''_1 0^{\epsilon_2} w''_2 \ldots w''_p 0^{\epsilon_{p+1}}$$

<u>*Ex*</u> : $w = 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 2\ 7\ 7\ 2\ 0\ 0\ 1\ 3.$
$m_1 = 3 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = 0$
$\epsilon_1 = 0 \quad \epsilon_2 = 0 \quad \epsilon_3 = 0$
$|w'_2| = 0 \quad |w'_1| = 3$
$|w''_1| = 3 \quad |w'_2| = 2$
$\mathbf{F_3}(w) = 0\ 0\ 3\ 1\ 2\ 0\ 0\ 0\ 7\ 7\ 2\ 1\ 3.$

Bibliographie

[1] Robert J. Clarke, Guo-Niu Han, Jiang Zeng. *A combinatorial interpretation of the Seidel. Generation of q-derangement numbers*. Annals of Combinatorics 4, 1997, pages 313-327.

[2] Jacques Désarménien, Michelle L. Wachs. *Descent Classes of Permutations with a Given Number of Fixed Points*. J. Combin. Theory, Ser. A, 64, 1993, pages 311-328.

[3] Dominique Foata. *On the Netto inversion number of a sequence*. Proc. Amer. Math. Soc., 19, 1968, pages 236-240.

[4] Dominique Foata, Guo-Niu Han. *Fix-Mahonian Calculus, I : two transformations*. European Journal of Combinatorics Vol 29(7), 2008, pages 1721-1732.

[5] Dominique Foata, Guo-Niu Han. *Fix-Mahonian Calculus, II : further statistics*. J.Comb.Theory, Ser.A 115(5), 2008, pages 726-736.

[6] Dominique Foata, M.-P. Schützenberger. *Major Index and Inversion number of Permutations*. Math. Nachr., 83, 1978, pages 143-159.

[7] G. Jacob, N.E. Oussous, M. Petitot. *Calcul formel* DEA Informatique, 2000.

Index